Mat. légue

Instruction par Pournet

INSTRUCTION

SUR

LA BALISTIQUE,

A L'USAGE

DES ÉLÈVES

DU CORPS ROYAL D'ÉTAT-MAJOR.



A PARIS,

Chez ANSELIN et POCHARD, successeurs de MAGIMEL, Libraires pour l'art militaire, rue Dauphine, n° 9;
BACHELIER, Libraire pour les mathématiques et la marine, quai des Augustins, n° 55.

1824.

IMPRIMERIE DE CASIMIR,
RUE DE LA VIEILLE-MONNAIE, N° 12.

DE LA BALISTIQUE.

La balistique est une science qui a pour objet le mouvement des projectiles.

Elle considère ce mouvement dans le vide et dans l'air.

Elle n'est et ne peut être qu'approximative dans ses applications ordinaires aux tirs de toute espèce, parce qu'elle ne peut tenir compte, pour chaque coup et avec la célérité nécessaire, de tous les effets qui résultent des variations de l'atmosphère, de la non-identité des armes à feu, des charges, des balles, des boulets, des obus et des bombes du même calibre; mais elle fait connaître les principaux résultats de la pratique, et donne au pointeur les moyens de corriger les erreurs les plus importantes du tir, et de diminuer le nombre de ses tâtonnemens. C'est sous ce rapport qu'elle a toujours été recommandée par les officiers les plus distingués de l'armée.

Elle tire son nom du mot *baliste*, qui dérive du verbe grec *βάλλω*, *je lance*, et qui sert encore à désigner une machine dont les anciens faisaient usage dans les siéges pour lancer de grosses pierres contre l'ennemi.

Les armes à feu les mieux faites, celles qui ont les qualités les plus essentielles, la justesse du tir, la légèreté et la solidité, deviennent inutiles dans les mains des soldats dont les officiers n'ont point d'idées exactes sur la balistique. Alors tous les feux devant l'ennemi se réduisent à des coups d'essai qui n'ont aucun résultat avantageux. L'infanterie perd la confiance qu'elle pouvait avoir dans le tir de son fusil; elle finit par le regarder comme une arme blanche ou comme un porte-baïonnette avec un coup de feu à bout portant; les batteries ne produisent plus qu'un vain bruit, et sont bientôt enlevées avec peu de perte par une troupe exercée. Mais lorsque l'officier est éclairé par la théorie, il resserre les limites des anomalies du tir, et, sans s'attacher, comme les géomètres, à une exactitude mathématique qui n'est point utile à l'armée, il dirige les feux d'une manière satisfaisante pour la pratique; et leur effet sera d'autant plus grand, toutes choses égales d'ailleurs, que l'on perfectionnera davantage la théorie du tir. L'un de nos meilleurs généraux et de nos premiers tacticiens, pénétré de ces vérités, émet lui-même le vœu suivant, dans ses ouvrages, en parlant de la balistique (*Essai général de tactique*, p. 192) : « Puisse « le gouvernement exciter le génie sur cette branche importante du « militaire. » Il ajoute plus bas (p. 207) : « Le nombre des coups d'é- « preuve n'est jamais bien considérable, quand la théorie et la pratique « ont formé le coup d'œil. » L'artilleur, le soldat d'infanterie et le cavalier obtiennent alors de leurs armes le résultat que l'on a droit d'exiger, d'après l'état de nos connaissances actuelles.

La balistique doit donc être enseignée non-seulement aux officiers d'artillerie, mais encore aux officiers de toutes les armes, pour qu'ils puissent instruire les sous-officiers et les soldats qu'ils ont sous leurs ordres, et les diriger avec plus de certitude dans les exercices pratiques. Elle devrait être le complément de leur théorie.

En conséquence, nous allons en exposer les principes et les applications de la manière la plus simple et la plus exacte possible. Comme elle est fondée sur les élémens de la mécanique, nous parlerons d'abord du mouvement en général, et spécialement du mouvement uniforme et du mouvement uniformément accéléré. Nous ferons connaître ensuite le mouvement des projectiles dans le vide; nous en déduirons, à l'aide de quelques coups d'épreuve et par approximation, la position des principaux points de la ligne qu'ils décrivent dans l'air, et dont on a besoin dans la pratique pour diminuer le nombre des tâtonnemens autant que l'état des choses le permet. Enfin nous donnerons l'art de pointer, ou la manière dont on doit diriger l'arme pour frapper le but qu'on veut atteindre.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Un corps est en mouvement, lorsqu'il occupe successivement différentes positions dans l'espace.

Le mouvement est uniforme ou varié.

Du mouvement uniforme.

Le mouvement uniforme est celui d'un corps qui se meut en ligne droite, et qui parcourt des espaces égaux en des temps égaux.

L'idée du temps est le résultat de l'impression que laissent dans l'esprit plusieurs événemens passés et successifs.

Pour mesurer le temps, on a eu recours à la considération du mouvement, et on adapté les balanciers aux pendules. On a supposé que deux corps égaux qui se mouvaient dans des circonstances absolument semblables, devaient parcourir dans le même temps deux intervalles égaux.

Soient, par exemple, deux corps P et P′ (*Balistique*, *fig.* 1, *pl.* I), égaux en volume et en poids, et suspendus aux extrémités de deux verges égales AP, A′P′. Supposons que l'on écarte chacune de ces verges de la verticale, de manière qu'elles prennent les positions AC, A′C′, telles que l'angle CAP soit égal à l'angle C′A′P′, les deux corps mettront le même temps pour revenir à leur position primitive.

Par conséquent, si un corps qui a reçu une impulsion parcourt dans un temps T un espace E, et qu'à la fin de ce temps il se trouve dans les mêmes circonstances qu'au commencement, c'est-à-dire que l'effet de l'impulsion se continue sans qu'aucun autre s'y ajoute, ce corps, dans un temps $T' = T$, parcourra ensuite un espace $E' = E$.

Dans le mouvement uniforme, on distingue par le nom de vitesse l'espace parcouru pendant un temps déterminé que l'on prend pour unité de temps. Ainsi l'espace parcouru pendant un temps quelconque, est égal à la vitesse répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans ce temps. C'est ce que l'on exprime en disant que l'espace est égal à la vitesse multipliée par le temps.

Lorsque l'on applique la géométrie au mouvement, le temps et la vitesse se représentent ordinairement par des lignes. Si donc dans un rectangle ABCD (*Balistique*, *pl.* I, *fig.* 2), on représente le temps par AB, et la vitesse par BC; si on suppose que le temps soit de cinq secondes, par exemple, pour fixer particulièrement les idées; si les droites Aa, ab, bc, cd et dB représentent ces cinq unités de temps; et si enfin on mène perpendiculairement à AB les droites aa', bb', cc', dd', l'espace parcouru dans la première seconde sera égal à aa', dans la deuxième seconde à bb', etc., et au bout du temps AB à la somme des cinq lignes aa', bb', cc', dd', et BC, ou à la droite BC

répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans AB, puisque ces lignes sont égales; par conséquent, en appelant E l'espace parcouru pendant toute la durée du mouvement, on aura en général :

$$E = BC \times AB,$$

Ou

$$E = V \times T,$$

En représentant par V la vitesse BC, et par T le temps AB. Cette vérité est la loi unique et fondamentale du mouvement uniforme.

Lorsque l'on suppose le temps divisé à l'infini, c'est-à-dire en parties infiniment petites, et que la vitesse reste la même, l'espace parcouru dans la première unité de temps est représenté par la ligne AD, et l'espace parcouru pendant toute la durée du mouvement est encore exprimé par l'équation $E = BC \times AB = V \times T$.

En effet, dans cette supposition, la droite AB, qui représente le temps, est divisée à l'infini. Donc le premier élément de division de cette droite est en A, et n'a pas une longueur quelconque A*a*; car il pourrait être partagé en deux, et le temps ne serait pas divisé à l'infini, ce qui serait contre l'hypothèse. Donc l'espace parcouru pendant le premier élément du temps, est représenté par la ligne AD. Donc l'espace parcouru pendant toute la durée du mouvement est égal à la somme de toutes les droites AD, aa', bb', cc', etc., BC, que l'on peut mener perpendiculairement à la ligne AB par chacun de ses élémens, et qui s'éloignent du point A, excepté la ligne AD, des quantités A*a*, A*b*, A*c*, etc. Ces quantités sont divisibles : la première en deux, la deuxième en trois, la troisième en quatre, etc.; et leur division ne peut être poussée plus loin par supposition; mais les droites AD, aa', bb', cc', etc., BC, représentent la vitesse BC répétée autant de fois qu'il y a d'unités infiniment petites dans AB, depuis la première qui est en A, jusqu'à la dernière qui est en B, par conséquent, lorsque le temps est divisé à l'infini et que la vitesse reste la même, on a encore :

$$E = BC \times AB = VT.$$

On appelle *force* la cause quelle qu'elle soit qui produit la vitesse.

Les causes étant supposées proportionnelles à leurs effets, les forces dans le mouvement uniforme sont comme les vitesses ou comme les espaces parcourus pendant l'unité de temps.

Des mouvemens variés et des mouvemens uniformément variés.

Le mouvement est varié, lorsque le rapport des espaces parcourus au temps employé à les parcourir varie continuellement.

On nomme *forces accélératrices* ou *retardatrices* celles qui produisent ces variations.

Pour concevoir plus facilement le mouvement varié, on suppose que le temps est divisé en une infinité d'instans ou parties très-petites, et qu'au commencement de chaque instant le mobile reçoit l'impulsion d'une force nouvelle; le mouvement est considéré comme uniforme pendant l'un quelconque de ces instans, et les vitesses de ces mouvemens uniformes particuliers, s'appellent vitesses acquises. Cette hypothèse s'écarte d'autant moins de la vérité que le temps est divisé en parties plus petites; l'espace parcouru d'un mouvement varié est ainsi égal à la somme des espaces parcourus d'un mouvement uniforme pendant chacun des instans de la durée du mouvement, ou à la somme des

vitesses acquises, puisque tous ces instans sont égaux et peuvent être pris chacun pour l'unité de temps (*pag.* 4).

Si l'action qui s'exerce sur le mobile au commencement de chaque instant cessait tout à coup, il ne se mouverait plus qu'en vertu de la vitesse que lui auraient donnée les impulsions reçues précédemment, le mouvement serait uniforme, la vitesse devenue constante se composerait de toutes les vitesses acquises pendant le temps qui se serait écoulé depuis le moment où le corps aurait commencé à se mouvoir; si la vitesse imprimée au commencement de chacun des instans est constamment la même, la vitesse acquise après un temps donné, est égale à cette vitesse constante répétée autant de fois qu'il y a d'instans dans le temps donné. C'est ce que l'on exprime en disant que la vitesse est égale au temps multiplié par la force accélératrice. Le mouvement qui a lieu dans cette hypothèse est le mouvement uniformément varié. Ce que l'on appelle force accélératrice est proprement la vitesse imprimée au commencement de chaque instant.

Tous les corps sont soumis à l'action de la pesanteur. Cette action se renouvelle à tous les instans: ainsi le mouvement uniformément accéléré se reproduit sans cesse dans la nature.

Nous ne dirons rien du mouvement uniformément retardé. Nous ne parlerons que du mouvement uniformément accéléré, parce qu'il suffit d'en connaître les lois, ainsi que celles du mouvement uniforme, et de comparer les espaces parcourus par le mobile en vertu de ces deux mouvemens, pour arriver au but que nous voulons atteindre.

Du mouvement uniformément accéléré.

Le mouvement uniformément accéléré est celui d'un corps dont la vitesse augmente proportionnellement au temps. Ainsi, dans ce mouvement, les vitesses acquises sont comme les temps.

En effet, la force accélératrice agissant constamment de la même manière à chaque instant sur le corps qu'elle fait mouvoir, il en résulte que si, au commencement du premier instant, elle imprime à ce corps une vitesse comme un, elle lui donne encore, au commencement du second instant, la même vitesse; car elle le sollicite au commencement de cet instant comme au commencement du premier; donc au deuxième instant, le mobile a une vitesse représentée par deux, puisqu'il a reçu deux impulsions égales. Il a par la même raison, au troisième instant, une vitesse comme trois, et ainsi de suite. « Par conséquent, les vitesses « acquises sont comme les temps, et en appelant V et V′ les vitesses ac« quises, et T et T′ les temps, on a :

» $V : V' :: T : T'$. » (Première loi.)

Donc si, dans un triangle rectangle ABC (*Balistique*, *fig.* 3, *pl.* I), la hauteur AB représente le temps T, et la base BC la vitesse V acquise au bout de ce temps, toute perpendiculaire bb'' à la hauteur AB, représentera la vitesse acquise au bout du temps Ab qui lui correspondra; car les lignes bb'' et BC seront proportionnelles aux lignes Ab et AB. (*Géométrie*).

Donc la somme des perpendiculaires BC, dd'', cc'', etc. que l'on peut élever à la droite AB par chacun de ses élémens et jusqu'à l'hypothénuse AC, représente la somme des vitesses acquises pendant tous les instans infiniment petits du temps T représenté par AB; donc elle est égale à l'espace parcouru pendant la durée du mouvement uniformément accéléré. (*Pag.* 5 *et* 6).

Or, si l'on forme le rectangle ABCD, et si on prolonge toutes les

perpendiculaires Bc, dd'', ec'', etc. jusqu'au côté CD, on aura deux triangles ABC et ACD, qui seront égaux, et qui renfermeront l'un et l'autre la même quantité de perpendiculaires égales chacune à chacune : donc l'espace parcouru pendant la durée du mouvement uniformément accéléré et que nous désignerons par e, sera la moitié des perpendiculaires du rectangle ABCD; mais la vitesse étant égale à BC, et le temps divisé à l'infini et exprimé par AB, les perpendiculaires du rectangle ABCD représentent l'espace E parcouru d'un mouvement uniforme (*page* 5), et l'on a :

$$E = AB \times BC = VT.$$

Donc l'espace e, parcouru d'un mouvement uniformément accéléré pendant le même temps AB = T, est la moitié de cette quantité, puisqu'il est égal à la somme des perpendiculaires du triangle ABC; donc on a :

$$e = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{VT}{2}.$$

« Par conséquent, l'espace parcouru est égal à la moitié de la vitesse « acquise multipliée par le temps. » (Deuxième loi.)

Au bout d'un temps quelconque AE, que nous appellerons T′, la vitesse acquise sera exprimée par EF, que nous représenterons par V′, et nous aurons de même, en nommant e' l'espace parcouru au bout de ce temps :

$$e = \frac{AE \times EF}{2} = \frac{V'T'}{2}.$$

Donc $$e : e' :: \frac{AB \times BC}{2} : \frac{AE \times EF}{2}.$$

Mais si l'on exprime par s et s' les surfaces des triangles rectangles ABC et AEF, on aura aussi :

$$s : s' :: \frac{AB \times BC}{2} : \frac{AE \times EF}{2}.$$

Donc les espaces parcourus sont proportionnels aux surfaces des triangles rectangles ABC et AEE : or ces triangles sont semblables, leurs surfaces sont comme les carrés de leurs côtés homologues, et puisque ces côtés représentent les temps et les vitesses acquises, il en résulte que « les espaces parcourus sont comme les carrés des temps ou des vitesses « acquises. » (Troisième loi.)

Rapports entre les espaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré, et d'un mouvement uniforme provenant des vitesses acquises.

Les espaces parcourus de deux mouvemens uniformes différens ont pour expressions (*page* 5) :

$$E = VT \text{ et } E' = V'T'.$$

Lorsque ces deux mouvemens proviennent des vitesses acquises au bout de deux espaces quelconques parcourus d'un mouvement uniformément accéléré, V et V′ représentent les vitesses acquises elles-mêmes, et on en déduit entre ces vitesses le rapport ci-après :

$$V : V' :: \frac{E}{T} : \frac{E'}{T'}.$$

Par conséquent, lorsque le temps est le même pour les deux mouvemens $T = T'$, et

$$V : V' :: E : E'.$$

Mais on a : $e : e' :: V^2 : V'^2$ (troisième loi) ;

Donc $e : e' :: E^2 : E'^2$;

C'est-à-dire que les espaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré dans des temps différens, sont entre eux comme les carrés des espaces parcourus d'un mouvement uniforme pendant un même temps, quel qu'il soit, et en vertu des vitesses acquises. (Premier rapport.)

L'espace parcouru d'un mouvement uniformément accéléré a pour valeur (*page* 7) :

$$e = \frac{VT}{2},$$

Et celui que parcourt un corps d'un mouvement uniforme, en vertu de la vitesse acquise V, pendant un temps T', est donné par l'équation $E = VT'$ (*page* 5.)

Donc, lorsque le temps est le même, $e = \frac{E}{2}$.

« Par conséquent, l'espace parcouru d'un mouvement uniformément « accéléré, est la moitié de l'espace parcouru d'un mouvement uni- « forme pendant le même temps, en vertu de la vitesse acquise. » (Deuxième rapport.)

De la valeur de la vitesse acquise.

La vitesse acquise n'est point appréciable pendant l'instant qu'elle a lieu, parce que cet instant est infiniment petit, et qu'on n'a pas d'instrumens capables de l'exprimer. Pour avoir la valeur de cette vitesse d'une manière déterminée et positive, on suppose que la force accélératrice cesse, et que le corps se meut d'un mouvement uniforme pendant un temps égal à celui de la durée du mouvement uniformément accéléré, et l'espace qu'il parcourt ainsi représente la vitesse acquise en quantité finie. Or, d'après le deuxième rapport des espaces parcourus,

$$e = \frac{E}{2};$$

Donc $E = 2e$.

« Ainsi la vitesse acquise est double de l'espace parcouru. »

Cette valeur de la vitesse acquise se déduit d'ailleurs immédiatement de l'équation

$$E = \frac{VT}{2};$$

Car en faisant $T = 1$, on a $V = 2E$.

De l'expression du temps.

Pour trouver l'expression du temps employé à parcourir un espace déterminé et connu, il faut avoir par l'expérience l'espace parcouru

dans une unité de temps, dans une seconde par exemple. Alors le premier rapport des espaces parcourus,

$$e : e' :: T^2 : T'^2$$

Devient $$e : e' :: 1'' : T'^2.$$

Dans cette proportion, on connaît les trois premiers termes; on en déduit le quatrième, et on a :

$$T' = \sqrt{\frac{e'}{e}};$$

Et si on représente par g l'espace parcouru par le mobile pendant une seconde, on aura :

$$T' = \sqrt{\frac{e'}{g'}} \text{ (1).}$$

---

(1) On démontre encore des trois manières suivantes la deuxième et la troisième loi du mouvement uniformément accéléré, dont on déduit les rapports et les conséquences ci-dessus :

1. Représentons l'espace parcouru pendant l'unité de temps, ou la vitesse, par une unité de surface, *au lieu de la représenter par une ligne*; cette unité d'espace peut être un rectangle, dont un des côtés exprimera l'unité de temps.

Soit ABCD ce rectangle (*Balistique, fig.* 4 et 5, *pl.* I); AC sera l'unité de temps. On représentera l'espace parcouru pendant un temps AX, par ABCD répété autant de fois que AC est contenu dans AX.

La considération d'instans très-petits n'est que spéculative. Dans l'application on suppose un temps d'une grandeur donnée, et l'on cherche quel est l'espace parcouru pendant ce temps, qui est ordinairement une seconde pour un corps dont le mouvement est uniformément varié.

Exprimons par le rectangle ABCD l'espace qu'une certaine force fait parcourir à un mobile pendant un temps T, que représente le côté AC.

Une force égale à celle qui agit d'abord, s'exerce à la fin du temps T. Ainsi, en raison de l'action des deux forces, l'espace parcouru pendant un temps T = T' sera représenté par le rectangle CEFG, dont la surface est double de celle de ABCD.

Une nouvelle force toujours égale à la première agissant à la fin du temps T', le mobile, pendant un temps T'' = T', parcourra un espace représenté par le rectangle FHIK = 3 ABCD. Si, après un temps = nT, le corps cessait de recevoir de nouvelles impulsions, il se mouverait avec la vitesse qu'il aurait acquise précédemment; l'espace qu'il parcourrait pendant un temps = nT, serait représenté par une surface = $n \times n$ ABCD. Or, la moitié de cette surface égale la somme de tous les rectangles ABCD, CEFG, etc., moins $n \frac{1}{2}$ ABCD.

A mesure que le temps diminue, les rectangles ABCD, ECGF, etc., deviennent plus petits. Enfin, lorsqu'on atteint la limite du décroissement, leur ensemble forme une surface triangulaire AIK. Cette surface égale la moitié du rectangle construit sur AI et IK. Si donc, après un certain temps T, l'action continue d'une force accélératrice constante cessait tout à coup, l'espace parcouru par le mobile

DU MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE.

De la trajectoire.

Le projectile, en sortant de la bouche à feu, est soumis à une double action. D'une part, la force qui résulte de l'inflammation de la poudre, lui imprime un mouvement uniforme suivant l'axe de la pièce; de l'autre, la pesanteur lui donne, dans le sens vertical, un mouvement uniformément accéléré, et le rapproche à chaque instant de la surface de la terre (*Physique, mouvement des corps graves*). En vertu de ces deux actions, il décrit une ligne courbe et plane.

En effet, représentons par AR (*Balistique, fig. 6, pl. I*) le prolongement de l'axe de la pièce, qu'on appelle *ligne de projection*, et par AX

---

pendant un temps T' égal T, serait le double de celui qu'il aurait parcouru précédemment.

Désignons par V la vitesse acquise après une seconde, ou l'espace qui, pendant une seconde, serait parcouru en vertu de cette vitesse, on obtiendrait la vitesse V', acquise pendant t secondes, en faisant cette proportion, $V : V' :: 1'' : t$.

La vitesse V est double de l'espace qui a été parcouru pendant la première seconde. Soit g cet espace, on aura $V = 2g$. Donc $2g : V' :: 1 : t$. D'où $V' = 2gt$.

L'espace que le mobile animé de la vitesse V' parcourrait pendant le temps $t' = t$, serait $= V't = 2gt \times t = 2gt^2$.

Or cet espace est double de celui qui a été parcouru pendant le temps t. Donc l'espace parcouru $e = gt^2$.

Pour un autre temps, l'on aura de même $e' = gt'^2$. Donc $e : e' :: t^2 : t'^2$.

Mais nous avons fait voir que l'on a $V : V' :: t : t'$. Donc on a aussi :

$$e : e' :: V^2 : V'^2.$$

Donc les espaces parcourus sont comme les carrés des temps et des vitesses acquises.

Le reste comme plus haut, pages 8 et 9.

Cette démonstration a l'avantage de faire voir que plus l'unité de temps diminue, plus l'espace parcouru pendant toute la durée du mouvement se rapproche de la surface triangulaire AIK; mais elle n'est point rigoureuse, parce que l'ensemble des rectangles ABCD, CEFG, etc., ne peut pas former une surface triangulaire : il faudrait pour cela que les petits triangles ABD, DEG, etc., infinis du second ordre, devinssent nuls, ce qui ne peut pas être, puisqu'alors l'espace parcouru dans le premier instant serait égal à zéro, car le rectangle ABCD est formé de deux triangles égaux. Pour que les infinis du second ordre disparussent, il faudrait que la limite du décroissement des rectangles ABCD et CEFG, etc., fût une droite, ce qui est impossible, parce qu'un ensemble de droites ne peut jamais former une surface. Le rectangle dont on se sert pour représenter l'unité de l'espace parcouru a en outre l'inconvénient de ne pouvoir être employé dans la détermination de la trajectoire.

2. Galilée suppose le triangle ABC (*fig.* 3.) divisé en une infinité d'élémens parallèles à BC, et il admet, d'après la première loi et la conséquence qui la suit, que la somme de ces élémens représente l'espace parcouru e. Il en conclut que cet espace est la moitié de l'espace parcouru d'un mouvement uniforme, en vertu de la vitesse

et AY les axes des coordonnées, dont l'un serait horizontal et l'autre vertical. Soit AB l'espace que le projectile parcourrait uniformément suivant AR dans le premier instant; A b celui qu'il parcourrait en vertu de la force accélératrice, ou la vitesse acquise dans cet instant (*pag*. 5), il parcourra dans le même temps la diagonale A m du parallélogramme AB bm, construit sur les directions des deux forces qui le sollicitent (*Statique*). Dans le second instant, sa vitesse acquise serait $mc = 2$ A b; l'espace qu'il parcourrait d'un mouvement uniforme serait toujours le même, et par conséquent $md =$ AB. Il suivra donc la diagonale mm' du second parallélogramme $mcm'd$, construit comme le premier et ainsi de suite. Donc la ligne qu'il décrira ne sera point une ligne droite, puisque les côtés du second parallélogramme et ceux des parallélogrammes suivans ne sont point proportionnels à A b et à AB; car le côté vertical de ces parallélogrammes augmente à chaque instant, tandis que l'autre côté ne change pas de grandeur. Les points m, m', m'',

---

acquise, et que les espaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré sont entre eux comme les carrés des temps ou des vitesses acquises. Cette démonstration serait exacte, si les élémens d'un triangle étaient entre eux comme leurs bases, ou s'ils se réduisaient à des lignes droites; mais parce qu'ils ne peuvent avoir ni l'une ni l'autre de ces deux propriétés, elle est regardée comme n'ayant point le degré de précision nécessaire.

3. Bezout a cherché à démontrer les lois du mouvement uniformément accéléré par les séries. Il appelle g l'espace parcouru dans le premier instant, et il pose cette équation :

$$e = g + 2g + 3g + 4g + \text{etc. } ug.$$

D'où en faisant $g = 1$, il tire,

$$e = 1 + 2 + 3 + 4 + \text{etc.} + u$$

u est égal au nombre des termes.

Donc $$e = (1 + u)\frac{u}{2}$$

Quand 1 est infiniment petit, u est infiniment grand; 1 s'évanouit ou peut être négligé, et on a :

$$e = \frac{u^2}{2}$$

Et par suite, $e : e' :: u^2 : u'^2$.

Or, quel que soit le nombre u, jamais l'unité ne disparaît. Cette démonstration est donc encore inexacte.

MM. Allaise, Billy, Puissant et Boudrot l'ont renouvelée en d'autres termes dans leurs cours de mathématiques à l'usage des élèves de l'École-Militaire, mais sans lui donner plus d'exactitude. Celle qu'on a exposée pag. 5, 6 et 7, et qu'on a trouvée en suivant la route tracée par Galilée, parait la plus simple et la plus précise. Elle complète d'ailleurs la partie élémentaire du mouvement des corps graves, qui, depuis cet illustre géomètre jusqu'à nos jours, n'avait fait aucun pas vers sa perfection, puisqu'elle ne permet point qu'on se serve des mathématiques transcendantes pour faire voir la vérité de ses propositions.

s'éloignent de plus en plus de AR par la même raison. Donc enfin la ligne que décrit le projectile est une ligne courbe située entièrement au-dessous du prolongement de l'axe de la pièce. Cette courbe s'appelle *trajectoire*; elle est plane, parce qu'elle a lieu dans un seul plan qui est déterminé par la verticale et la ligne de projection.

S'il existait des intervalles sensibles entre les impulsions de la force de la pesanteur, la trajectoire serait une ligne brisée; mais comme ces impulsions se font dans des instans infiniment petits qui ne sont point séparés les uns des autres (*pag.* 10), elle est une ligne courbe continue, parce qu'alors la diagonale de chaque parallélogramme est elle-même infiniment petite.

Les lignes Bm, dm', fm'', etc., sont égales chacune à chacune aux lignes Ab, mc, $m'e$, etc., qui expriment les vitesses acquises dans le premier, deuxième, troisième, etc., instant de la durée du mouvement. (*Pag.* 5 et 11.)

Donc B m, C m', D m'', etc., représentent les espaces que parcourrait le projectile suivant la verticale, pendant le temps qu'il mettrait pour arriver aux points m, m', m'', etc., en suivant la trajectoire; car ces droites sont les sommes de toutes les vitesses acquises pendant ce temps, puisque Bm = Ab, Cm' = Bm + dm', Dm'' = Cm' + fm'', etc. (*Page* 11). Donc une verticale quelconque Bm ou Em''', etc., comprise entre la ligne de projection et la trajectoire, représente l'espace qui serait parcouru par le projectile en vertu de la pesanteur, pendant le temps qu'il aurait employé pour parvenir en m ou m''', etc. en vertu du mouvement simultané de la pesanteur et de la force de la poudre.

Supposons maintenant que la ligne A$m\,m'\,m''$ Q représente la trajectoire; soit m un point quelconque de cette courbe, et BP la verticale passant par ce point, si l'on avait la relation qui existe entre les droites AB et Bm, la trajectoire serait déterminée, parce qu'on connaît l'angle RAQ, et que de la valeur de AB, prise à volonté sur AR, on déduirait celle de Bm. Cherchons donc l'expression générale de cette relation. Si le projectile n'était soumis qu'à l'action de la poudre, au bout d'un temps T, il aurait parcouru un espace que nous supposons égal à la ligne AB, et que nous pouvons représenter par E. Pendant le même temps T, la pesanteur lui ferait parcourir d'un mouvement uniformément accéléré un autre espace Bm, suivant la verticale et vers la surface de la terre. Soit e cet espace : si à la fin du temps T, la force accélératrice cessait d'agir, 2 e serait l'espace que le projectile parcourrait d'un mouvement uniforme pendant le même temps T (*deuxième rapport*, *page* 8). La vitesse qui résulte de l'inflammation de la poudre se nomme *vitesse initiale*. On peut la considérer comme égale à la vitesse que le projectile aurait acquise, après avoir parcouru un certain espace AH, suivant la direction de l'axe AR, en vertu d'une force accélérative égale à celle de la pesanteur. Soit h cet espace; on aura alors deux espaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré h et e dans des temps différens, et deux espaces parcourus d'un mouvement uniforme E et 2 e dans le même temps T. On pourra donc poser cette proportion (*premier rapport*, *page* 8) :

$$h : e :: \mathrm{E}^2 : 4e^2,$$

D'où on tire $e\mathrm{E}^2 = 4he^2$,

$$\mathrm{E}^2 = 4he. \quad (a)$$

Par conséquent, lorsque l'on connaîtra la vitesse initiale du projectile, c'est-à-dire l'espace que la force de la poudre lui ferait parcourir

uniformément suivant l'axe de la pièce pendant une unité de temps, on pourra tracer la trajectoire. L'expérience prouve qu'un corps qui tombe librement à la surface de la terre, parcourt $4^{m}\,9045^{10m}$ dans la première seconde, à la latitude de Paris, en vertu de l'action de la pesanteur. L'espace qu'il parcourrait ensuite d'un mouvement uniforme pendant le même temps, si la force accélératrice cessait d'agir, serait égal à $9^{m}\,809^{m}$ (*deuxième rapport*, *page* 8). Conséquemment V étant la vitesse initiale du projectile pendant une seconde on aura (*premier rapport*, *page* 8), en faisant $4^{m}\,9045^{10m} = g$,

$$h : g :: V^2 : 4g^2,$$

D'où
$$h = \frac{V^2\,g}{4g^2} = \frac{V^2}{4g}.$$

Si donc on connaît la vitesse V, et si elle est par exemple de 400^{m} par seconde, h sera une quantité déterminée et égale à $8155^{m}\,775^{m}\,\frac{6050}{19618}$.

Donc en mettant successivement, dans l'équation de la trajectoire, pour E les droites AB, AC, etc., prises arbitrairement, on en déduira les longueurs des lignes correspondantes Bm, Cm', Dm'', etc., et unissant les extrémités de ces droites par une ligne, nous aurons la courbe cherchée. L'équation (a) nous apprend que la trajectoire est une parabole, parce qu'elle nous fait voir que les carrés de ses ordonnées AB, AC, etc., sont entre eux comme les abscisses correspondantes Bm, Cm', etc.; car on a pour deux espaces quelconques :

$$E \text{ et } E' : \qquad E^2 = 4he \text{ et } E'^2 = 4he';$$

Donc
$$E^2 : E'^2 :: e : e'.$$

Or cette propriété appartient exclusivement à la parabole (*sections coniques*).

Pour plus de simplicité, et pour faciliter les calculs et le tracé de la trajectoire, changeons les coordonnées obliques AB, Bm, et rapportons-les aux axes rectangulaires AX et AY.

Nous avons Bm = BP — Pm. Faisons AP = x et Pm = y.

L'angle BAP de l'axe de la pièce avec l'horizontale AX s'appelle *angle de projection*. Représentons la tangente de cet angle par t, nous aurons :

$$e = BP - Pm = BP - y$$

$$1 : t :: AP : BP \text{ (trigonométrie.)}$$

Ou
$$1 : t :: x : BP$$

Donc
$$BP = tx \text{ et } e = tx - y$$

Par conséquent
$$E^2 = 4h\,(tx - y)$$

Or
$$E^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = x^2 + t^2x^2$$

Donc
$$x^2 + t^2x^2 = 4h\,(tx - y)$$

D'où on déduit pour l'équation de la trajectoire, en faisant passer le second membre dans le premier, et ordonnant par rapport à x,

$$(1 + t^2)\,x^2 - 4htx + 4hy = 0 \qquad (b)$$

Pour tracer la trajectoire à l'aide de cette équation, connaissant

l'angle de projection et la vitesse du projectile, on substitue à la place de x une suite de valeurs AP, AP′, AP″, etc., jusqu'à AQ; on en déduit la valeur des ordonnées correspondantes P m, P′ m', etc.; on réunit les sommets de ces ordonnées par une ligne courbe, et on a le tracé demandé, qui est d'autant plus exact que les abscisses diffèrent moins les unes des autres.

Des amplitudes et des hauteurs du jet.

La ligne AQ, qui unit le centre de la bouche de la pièce avec le point où le boulet tombe sur le plan horizontal qui passe par ce centre, s'appelle *amplitude*, et la verticale P″ m'', élevée sur le milieu de AQ, se nomme *hauteur du jet*.

Or la ligne PQ est l'abscisse du point Q, et pour cette abscisse $y=0$; donc en substituant cette valeur de y dans l'équation de la trajectoire, on en déduira la longueur de l'amplitude : or cette équation donne :

$$(1+t^2)\,x^2-4\,h\,t\,x=0$$

Par conséquent, l'amplitude a deux valeurs, dont l'une est égale à zéro, et correspond à l'origine des coordonnées.

En divisant le résultat ci-dessus par x, on a pour l'autre valeur de l'amplitude :

$$x=\frac{4\,h\,t}{1+t^2}\quad (c)$$

En appelant a l'angle de projection, et en mettant dans cette expression pour t sa valeur $\frac{\sin.\ a}{\cos.\ a}$, et en observant que

$$\sin.\ 2\,a=2\sin.\ a\cos.\ a,$$

Puisque $\sin.\ (a+b)=\sin.\ a\cos.\ b+\sin.\ b\cos.\ a$ (*trigonométrie*),

On a : $$x=2\,h\sin.\ 2\,a.$$

Donc l'amplitude varie avec l'angle de projection; donc elle est la plus grande possible lorsque cet angle est de 45°; car alors sin. 2 a atteint son maximum de grandeur, puisqu'il est égal au sinus de 90°. La hauteur du jet qui correspond à cette amplitude est la plus grande hauteur du jet. En substituant la moitié de la valeur (c) de l'amplitude dans l'équation (b), on obtient pour la valeur du jet correspondante, en remarquant que $t=\frac{\sin.\ a}{\cos.\ a}$,

$$y=h\sin.^2 a.$$

Par conséquent, pour la même vitesse initiale, les amplitudes sont entre elles comme les sinus du double de leurs angles de projection, et les hauteurs du jet comme les carrés des sinus de ces angles; car, pour un autre angle de projection a', on a de même :

$$x'=2\,h\sin.\ 2\,a;\ y'=h\sin.^2 a;$$

Et en divisant ces valeurs de x' et de y' par celles de x et de y qu'on a obtenues plus haut, on en déduit :

$$x:x'::\sin.\ 2\,a:\sin.\ 2\,a',$$

Et

$$y:y'::\sin.^2 a:\sin.^2 a'.$$

Il résulte encore évidemment de la valeur de l'amplitude

$$x = 2h \sin. 2a,$$

1°. Que les amplitudes sont égales sous des angles de projection également éloignés de 45°;

2°. Qu'avec la même vitesse initiale, une amplitude quelconque est à la plus grande amplitude, comme le sinus du double de son angle de projection est au sinus total, c'est-à-dire au rayon des tables ou à l'unité. Par conséquent, pour déterminer les amplitudes correspondantes à tous les angles de projection depuis zéro jusqu'à 90°, il suffit de connaître une amplitude et son angle de projection.

On a fait voir (*page* 13) que la trajectoire est une parabole; donc la hauteur du jet fait partie de son grand axe, et est égale au quart de l'amplitude lorsque l'angle de projection est de 45°, puisque d'après les propriétés de cette courbe (*Balistique, pl.* I, *fig.* 7), la sous-tangente DP″ est double de l'abscisse m'' P″ (*sections coniques*), et qu'alors le triangle rectangle ADP″ est isocèle et donne :

$$P''m'' = \frac{AP''}{2} = \frac{AQ}{4}.$$

Donc aussi l'angle de chute P″QD est égal à l'angle de projection DAP″ quel qu'il soit, parce que AP″ étant constamment la moitié de AQ, les deux triangles rectangles ADP″ et P″DQ sont toujours égaux.

De la vitesse initiale.

La vitesse initiale, comme on l'a vu, pages 12 et 13, est celle que la force de la poudre imprime au projectile, ou l'espace que cette force lui ferait parcourir pendant une unité de temps d'un mouvement uniforme suivant l'axe de la pièce, si la pesanteur cessait d'agir.

Elle se déduit de la longueur de l'amplitude.

Soit l cette longueur, on aura, (*équation* (c)) ;

$$l = \frac{4ht}{1+t^2} \text{ et } h = \frac{(1+t^2)\,l}{4t}$$

Or V étant la vitesse initiale pendant une seconde (*page* 13), on a :

$$h = \frac{V^2}{4g} \quad \text{d'où} \quad \frac{(1+t^2)\,l}{4t} = \frac{V^2}{4g}$$

Donc $$V = \sqrt{\frac{(1+t^2)\,g\,l}{t}}$$

De la durée du mouvement.

Le temps que le projectile emploie à parcourir sa trajectoire, est le même que celui qu'il mettrait à parcourir la verticale RQ (*Balistique, pl.* I, *fig.* 6), en vertu de la force accélératrice de la pesanteur, puisque cette verticale est égale à la somme des espaces que lui ferait parcourir cette force pendant tous les instans de la durée du mouvement; car

$$RQ = Rq + qq' + q'q'' + q''q''' + q'''q'''' + q''''Q.$$
$$Ab \times mc \times m'e \times m''g \times m'''k \times m''''o.$$

Donc en représentant par T le temps employé par le projectile pour arriver au point Q, on aura (*page* 9) :

$$g : RQ :: 1'' : T^2;$$

D'où on tire : $$T = \sqrt{\frac{RQ}{g}}.$$

Mais $RQ = tx = tl$ (*pages* 13 et 15) ;

Donc enfin $$T = \sqrt{\frac{tl}{g}}.$$

Des principales questions de balistique.

Dans l'équation de la trajectoire, t représente la tangente de l'angle de projection, x l'amplitude, lorsque $y = 0$ et h a une valeur déterminée, lorsque l'on connaît la vitesse initiale (*page* 13).

En supposant successivement connues deux de ces trois quantités t, x et h, on a les questions suivantes :

1°. Connaissant la tangente de l'angle de projection et l'amplitude, trouver la vitesse initiale ;

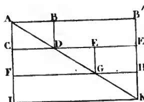
2°. Connaissant l'amplitude et la vitesse initiale, trouver l'angle de projection ;

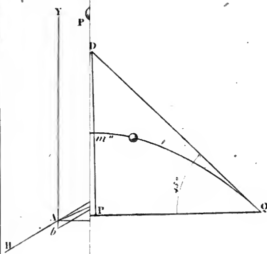
3°. Connaissant la vitesse initiale et l'angle de projection, trouver l'amplitude.

Ces trois questions, avec celles de la durée du mouvement, de l'angle de chute, et de la plus grande hauteur du jet, sont les principales de la balistique ; elles se résolvent directement en faisant $y = 0$ dans l'équation (b), en y substituant les valeurs des deux quantités connues, et en déduisant de cette équation, à l'aide de ce qui précède, la valeur de la quantité que l'on cherche.

On admet ainsi que le plan de chute est horizontal, et qu'il passe par le centre de la bouche de la pièce. Dans le cas le plus général, on donnerait à y et à x les valeurs correspondantes à la position du but, et on en déduirait ensuite de la même manière les valeurs des quantités demandées.

Fig. 5.







Poumet fecit.

